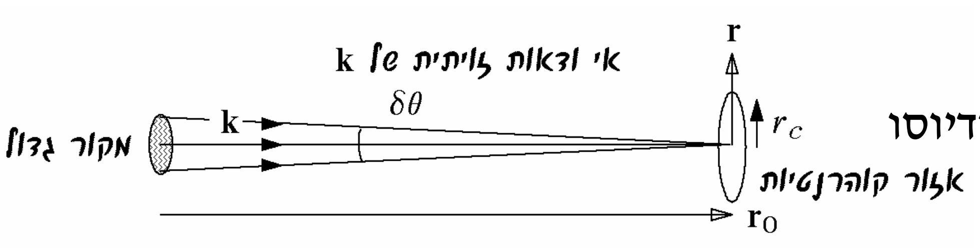
קוהרנטיות מרחבית

- אם כיוון הגל אינו מוגדר היטב, בהנחה שאורך הגל נשמר (כלומר $|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}_0 + \delta\mathbf{k}|$) השגיאה האפשרית בזוית הכיוון היא $\delta\theta = \delta k / k_0$.
- כתוצאה מזוית זו, אם אנו יודעים בדיוק את המופע בנקודה $\mathbf{r}_0$, במרחק $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ממנו השגיאה האפשרית במופע תהיה $\delta k \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$
- מאחר ו- $|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}_0 + \delta\mathbf{k}|$ נקבל $\delta k \perp \mathbf{r}_0$.
- כך מוגדר מרחק קוהרנטיות במישור ניצב ל- k_0 שרדיוסו



$$r_c = 2\pi / \delta k$$

- כאשר המרחק מהמקור הוא $\mathbf{r}_0$, אין לנו שום מידע שימושי על המופע, כי השגיאה האפשרית גדולה מ-2π.
- מרחק זה מגדיר אזור קוהרנטיות כמעגל שרדיוסו r_c סביב לנקודה $\mathbf{r}_0$, שבה יש לנו מידע חלקי ולא מדויק על המופע. בתוך אזור זה קיימת קוהרנטיות חלקית.
- עבור מקור שגודלו 1 ס"מ במרחק 100 מ' והוא פולט אור נראה ($\lambda = 0.5\mu m$), זוית אי-הוודאות תיתן:

$$\delta k = 10^{-4} k_0 = 2\pi \cdot 10^{-4} / \lambda$$

$$r_c = \frac{2\pi}{\delta k} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi \cdot 10^{-4}} = 10^4 \lambda = 5\text{mm}$$

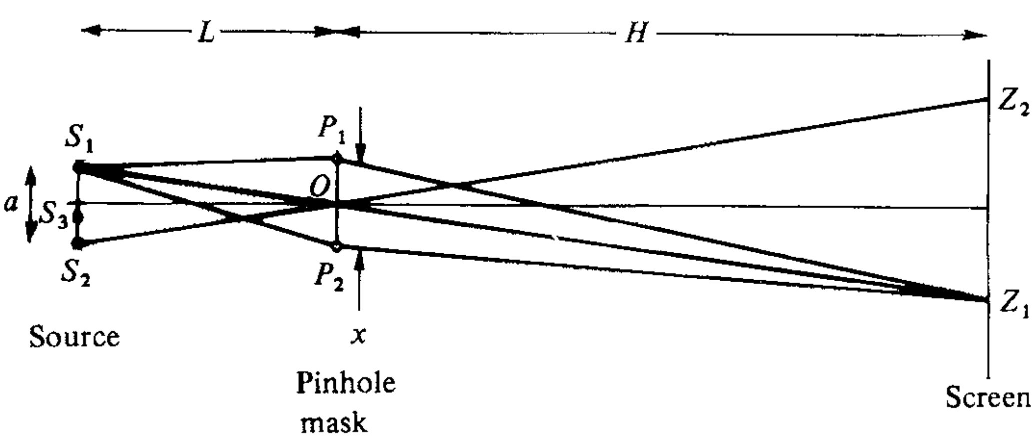
טווח קוהרנטיות

- נתבונן במקור בגודל סופי a דרך שני חרירים P_1 ו- P_2 שמרחקם x והקרנים מהם מתאבכות על מסך.
- סדרי האפס של שני קצוות המקור נופלים בשני מקומות על המסך, P_1 ו- P_2.
- מחזור פסי ההתאבכות הוא $H\lambda / x$. כאשר סדרי האפס מופיעים במופעים הפוכים, הם מתמצעים לאפס.
- במקרה זה

$$\frac{1}{2}\frac{H\lambda}{x} = Z_1 Z_2 = \frac{aH}{L} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L\lambda}{2a}$$

- עבור גודל זויתי של המקור $\alpha = a / L$ תהיה קוהרנטיות בין נקודות סמוכות במסכה רק אם מרחק הנקודות יהיה קטן ממרחק הקוהרנטיות

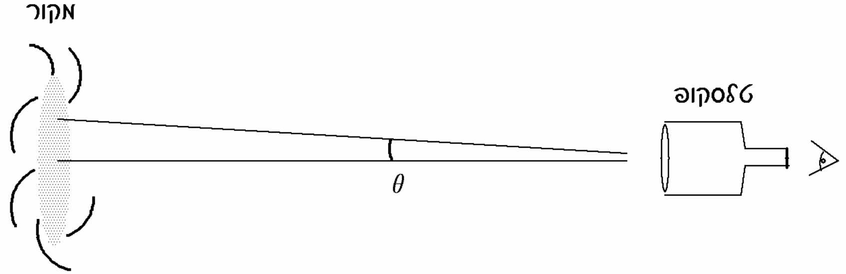
$$x_c = \frac{\lambda}{2\alpha}$$



- אם נתחשב גם בשאר הנקודות בין הקצוות, נצטרך להוסיף תיקון קטן.
- מכלילים את המרחק לאזור קוהרנטיות.

משפט ון-ציטרט - זרניקה

- בדומה למשפט וינר-חינצ'ין המקשר בין הקוהרנטיות הזמנית וספקטרום המקור, קיים קשר פוריה בין הקוהרנטיות המרחבית והספקטרום המרחבי של המקור.
- ממצעים על שטח S (המיצוע בזמן מובלע בחישוב) ומניחים שעוצמת האור שווה ליחידה



$$\gamma(\mathbf{r}) = \left\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{S}\iint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})\mathrm{d}^2\mathbf{r} = \frac{1}{S}\mathbf{E}(\mathbf{r})\otimes\mathbf{E}^*(-\mathbf{r})$$

- מאחר ו- $\delta k \perp \mathbf{k}_0$ הוא הרכיב של $\mathbf{k}$ בכוון $\mathbf{r}$ נקבל שההתמרה היא

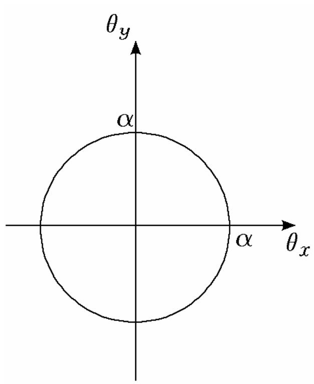
$$\tilde{\gamma}(\delta\mathbf{k}) = e(\delta\mathbf{k})\cdot e^*(\delta\mathbf{k}) = |e(\delta\mathbf{k})|^2 = I(\delta\mathbf{k})$$

- זוית הכיוון היא $\delta\theta = \delta k / k_0$ והיא דו-מימדית. לכן התמרה זו מבטאת את עוצמת המקור בתלות בזווית הראיה שלו.
- משתמשים בהתמרה זו בין פונקצית הקורלציה ופילוג עוצמת פסי ההתאבכות למדידת פילוג עוצמת האור במקורות אסטרונומיים.
- התמרה זו היא משפט ון ציטרט – זרניקה (Van Cittert - Zernike).

כוכב עגול

- משפט ון ציטרט – זרניקה מאפשר לנו לחשב כיצד תראה פונקצית הקוהרנטיות של כוכב עגול שקוטרו α.
- בכל זוית

$$\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$$

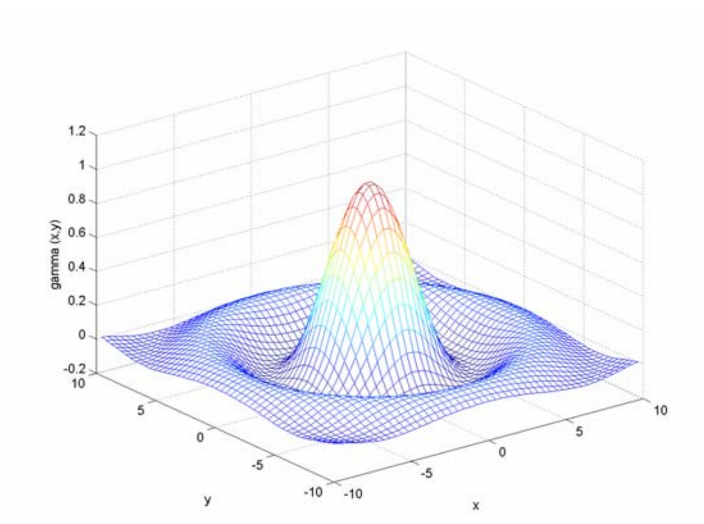


- העוצמה הזויתית של הכוכב היא

$$I(\mathbf{k_0}\theta) = \begin{cases} 1 & |\theta| \le \alpha/2 \\ 0 & |\theta| > \alpha/2 \end{cases}$$

- פונקצית הקוהרנטיות היא

$$\gamma(\mathbf{r}) = F.T.\{I(\mathbf{k_0}\theta)\} = \frac{2J_1(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k_0}\alpha/2)}{\mathbf{r}\cdot\mathbf{k_0}\alpha/2}$$

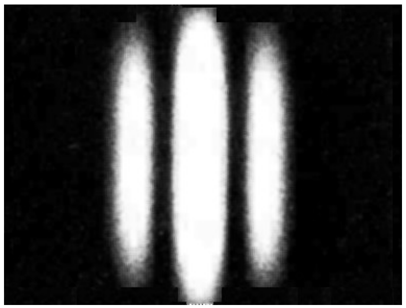


- והאפס הראשון קורה ברדיוס

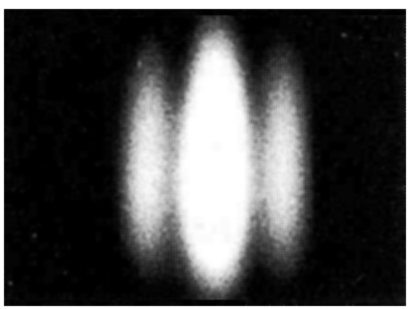
$$\gamma(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{r}\cdot\mathbf{k_0}\frac{\alpha}{2} = 3.83\ ;\ \mathbf{r} = 1.22\frac{\lambda}{\alpha}$$

מדידת כוכב עגול

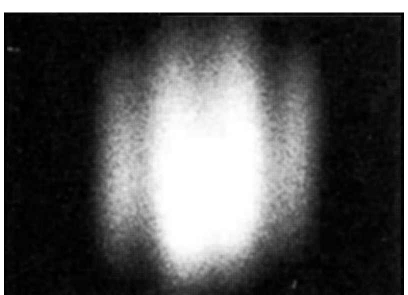
- בניסוי מעבדה ניתן לשנות את המרחקים בין הסדקים ואת גודל המקור, ועל ידי כך את מידת הקוהרנטיות שלו.
- כאשר הקוהרנטיות הופכת סימן, מתהפכים הפסים השחורים ללבנים וההפך.



$\gamma = 0.97$



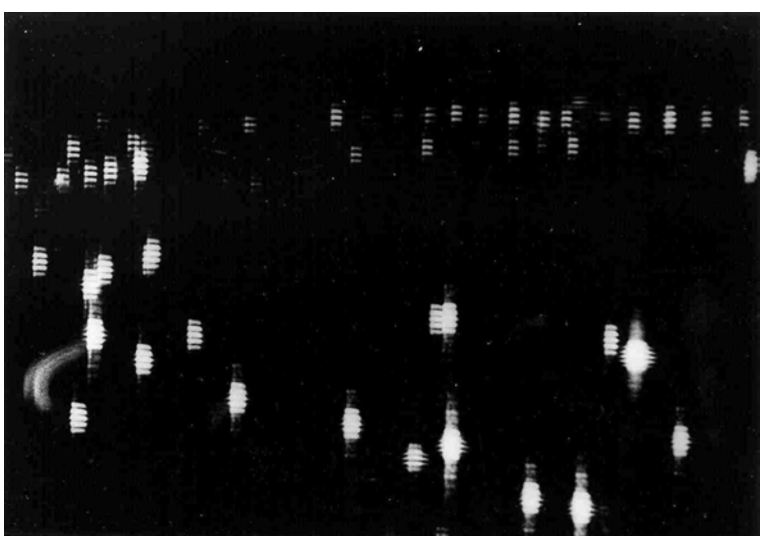
$\gamma = 0.50$



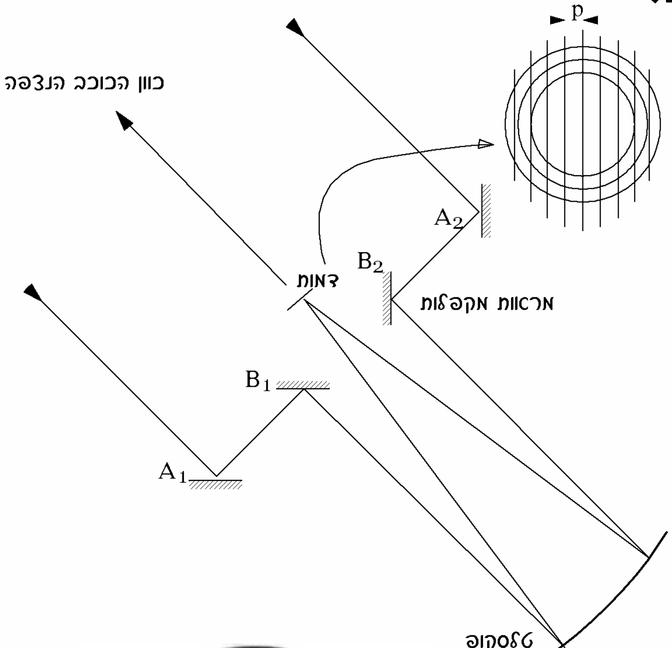
$\gamma = -0.07$

ניסוי שדה

- בניסוי שדה צולם אזור עירוני עם פנסי רחוב קרובים ורחוקים ובזמני חשיפה שונים.
- התמונה צולמה דרך שני חרירים במרחקים שונים ובכיוונים שונים ביניהם.
- צפיפות פסי ההתאבכות וכיוונם תלויים במיקום החורים. הניגוד תלוי בגודל המקור וברוחב הפס שלו.

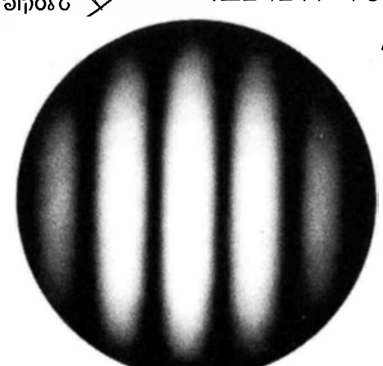


אינטרפרומטר מייכלסון לכוכבים



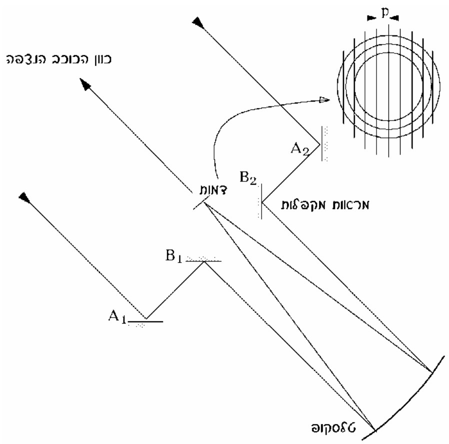
- מייכלסון בנה אינטרפרומטר אסטרונומי מיוחד למדידת ניגוד הפסים.
- האינטרפרומטר התבסס על ניסוי יאנג שבו פותחים שני פתחים, B_1 ו-B_2 במפתח הטלסקופ ומודדים את ניגוד פסי ההתאבכות במוקד הטלסקופ.
- כושר ההפרדה מוגבל על ידי מפתח הטלסקופ.
- מייכלסון הרחיב את המרחק בין המפתחים על ידי תוספת מראות מחוץ לקוטר הטלסקופ בנקודות A_1 ו-A_2 .
- כושר ההפרדה נקבע על המרחק בין המראות החיצוניות **r** אך תדר פסי ההתאבכות p תלוי במרחק בין הנקודות B_1 ו-B_2 .
- הניסוי של מייכלסון היה להעריך את הניגוד של פסי ההתאבכות כתלות ב-**r**. כאשר הניגוד יורד לאפס, אנו מקבלים את קוטר הכוכב.
- למשל עבור קוטר כוכב של 0.01 שניות קשת יהיה המרחק מטר כאשר התצפית נעשית באור נראה.

דמות מכל מִפתח הטלסקופ



דמות משני מִפתחים קטנים

אינטרפרומטרי כוכבים



- מייכלסון הרחיב את הטלסקופ של 2.5 מטר עד 6 מטר.
- הגבלת ההרחבה היתה רעידות מכניות בקורה.
- הגבלה אחרת היתה שינויים אטמוספריים בין הקרנים, שהזיזו את פסי ההתאבכות לפי הפרשי המופעים בשני המִפתחים.
- כיום בונים אינטרפרומטרים דומים ואחרים בכמה מקומות בעולם.
- מחברים טלסקופים גדולים וקטנים באמצעות קוי השהיה (טרומבונים אופטיים) להשוואת המסלולים האופטיים בין הקרניים.
- עד כה הגיעו למרחקי טלסקופים של מאה מטר ויותר.
- נעזרים בטכניקות מודרניות למדידת ניגוד הפסים V, ומתוכו מרחקים בין כוכבים קרובים, גודל כוכבים, ועוד.
- אחת השיטות המקובלות היא התמרת פוריה של פסי ההתאבכות כפונקציה של המרחק, ממש כמו בספקטרומטר פוריה.

סטטיסטיקת פואסון

- ראינו שהעוצמה של חבילות גלים (הנובעות מחיבור של תדרים שונים) מתנדנדות אקראית במשרעת השווה לעוצמה הממוצעת. נתאר כאן את השינויים הקלאסיים בגל.
- בזמן המדידה פוגעים הפוטונים בגלאי ויוצרים בו פוטו-אלקטרונים: אלקטרונים הנובעים מפוטונים.
- יש כאן שני מקורות לשינויי עוצמה: בגלל אי אחידות הפוטונים ובגלל אי אחידות זרם האלקטרונים.
- המספר הממוצע של אלקטרונים הנפלטים בזמן מדידה $\delta t < T_1 < \tau_{coherence}$ הוא

$$\bar{n} \equiv \langle n \rangle = \langle I(t) \rangle_{T_1} \eta \delta t / \hbar \omega$$

- כאן משתמשים בעוצמה הממוצעת $< I(t) >$ וביעילות הקוואנטית η .
- היעילות הקוואנטית η היא ההסתברות לקבל פוטואלקטרון מתוך פוטון באנרגיה ידועה.
- פילוג האלקטרונים הוא לפי סטטיסטיקת פואסון (Poisson), שבה הסיכוי לקבל n פוטונים הוא

$$p(n) = \frac{\bar{n}\, e^{-\bar{n}}}{n!}$$

- השונות של פילוג פואסון שווה לערך הממוצע שלו

$$\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle_{T_1} \equiv \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 = \bar{n}$$

סטטיסטיקה של פוטונים

- מקור אחד לשינוי במספר הפוטואלקטרונים הוא פילוג פואסון של זרם האלקטרונים הנוצרים.
- ממוצע הקרינה עצמו יוגדר אם כן על פרק זמן ארוך בהרבה T_0

$$\overline{\overline{n}} \equiv \left\langle \overline{n} \right\rangle_{T_0} = \left\langle I(t) \right\rangle_{T_0} \eta \delta t / \hbar\omega$$

- הקרינה עצמה משתנה בזמן, ועד כה לקחנו את ערכה הממוצע $< I(t) >$.
- ראינו שגם עבור חבילות גלים השינוי בריבוע הממוצע היה שווה לממוצע

$$\left[\left\langle I(t) \right\rangle_{T_1} - \left\langle I(t) \right\rangle_{T_0} \right]^2 = a^4 N^2 = \left[\left\langle I(t) \right\rangle_{T_0} \right]^2$$

- בזמן המדידה הקצר, δt, ניתן לרשום זאת בצורה

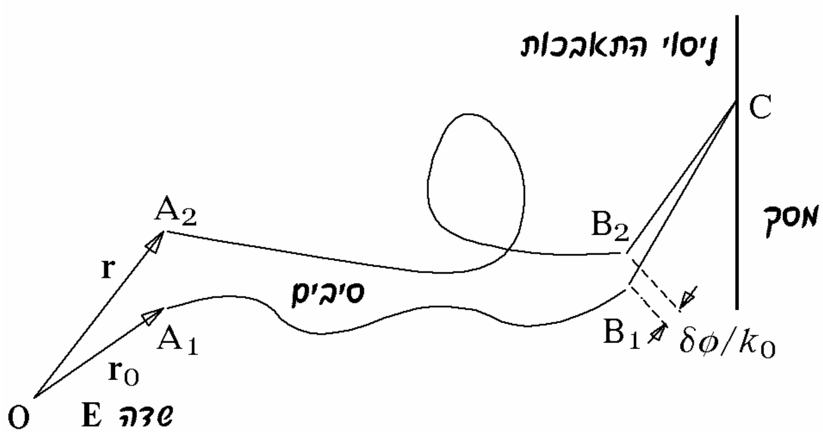
$$\left\langle \left(\Delta \overline{n} \right)^2 \right\rangle_{T_0} \equiv \left\langle \left(\overline{n} - \overline{\overline{n}} \right)^2 \right\rangle_{T_0} = \overline{\overline{n}}^2$$

סכום הפילוגים

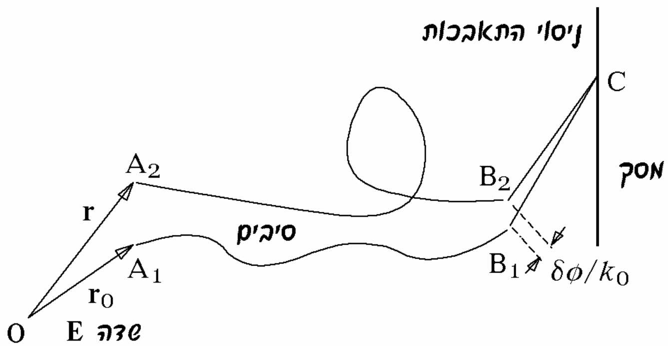
- כיון שאין קשר בין שני הפילוגים וכל אחד עצמאי, ניתן לחבר את השונויות שלהם לשונות אחת

$$\left\langle \left(n-\bar{\bar{n}}\right)^2 \right\rangle_{T_0} = \left\langle \left(\Delta\bar{n}\right)^2 \right\rangle_{T_0} + \left\langle \left\langle \left(\Delta n\right)^2 \right\rangle_{T_1} \right\rangle_{T_0} = \bar{\bar{n}}^2 + \bar{\bar{n}}$$

- אבל זו בדיוק השונות של מספר הפוטונים במצב קוואנטי ידוע, כשמתיחסים אליהם כחלקיקי בוזה-איינשטיין חסרי מסה.
- יש כאן אפקט של איגוד פוטונים (photon bunching) ההופך את התהליך לאקראי פחות, בגלל שילוב שני הפילוגים, של הפוטונים ושל האלקטרונים.
- ניתן להסביר את איגוד הפוטונים על ידי שימת שני גלאים ביציאות B_1 ו-B_2. כעת משווים את הזרמים היוצאים מן הגלאים הללו.
- זרמים אלו שווים לערכים הממוצעים של העוצמות, $< I_1(t) >_{T1}$ ו- $< I_2(t) >_{T1}$.
- בכל אחת מהיציאות יש לנו הרבה גלים בסיסיים.
- לגלים אלו יש מופעים הקשורים לכיוון המקור.



קוהרנטיות בעוצמה



- מחפשים את ממוצע המכפלות של $<I_1(t)>_{T1}$ ו- $<I_2(t)>_{T1}$.
- בכל אחת מהיציאות יש לנו הרבה גלים בסיסיים.
- לגלים אלו יש מופעים הקשורים לכיוון המקור.

$$\left\langle I_1(t) I_2(t) \right\rangle = a^4 \left\langle \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{i\omega_j t} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-i\omega_j t} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{i\left(\omega_j t+\phi_j\right)} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-i\left(\omega_j t+\phi_j\right)} \right\rangle$$

$$= a^4 \left\langle \sum_{j,k,l,m=1}^{N} \mathrm{e}^{i\left[\left(\omega_j-\omega_k+\omega_l-\omega_m\right)t+\left(\phi_l-\phi_m\right)\right]} \right\rangle$$

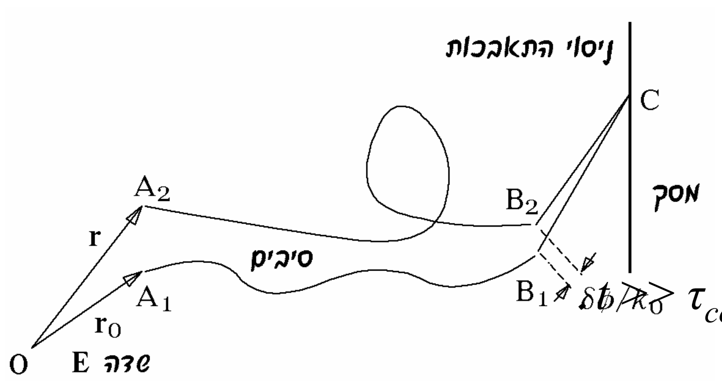
- ראינו שעבור ממוצע זמן ארוך ישארו רק האברים $j = k,\ l = m$ ואז $<I_1(t)\, I_2(t)>_{T0} = a^4 N^2$.
- אם הבדלי המופעים המירביים קטנים מרבע מחזור נקבל גם תרומות מהאברים מסוג $j = m,\ k = l$ באותו ערך, $a^4 N^2$.
- אם הנקודות A$_2$, A$_1$, נמצאות אחת אחרי השניה, יהיה המופע $\varphi_j = \omega_j \tau$. כעת נקבל תרומה רק אם

$$\tau \ll \frac{\pi}{2\left|\omega_l-\omega_m\right|_{\max}} = \frac{\pi}{\varepsilon} \approx \tau_{coherence}$$

קוהרנטיות מסדר שני

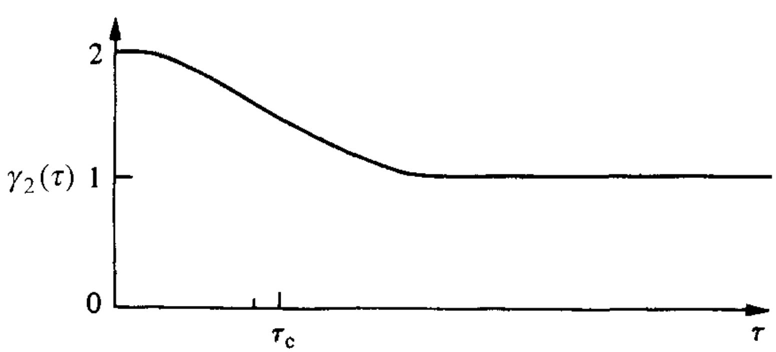
- נגדיר $I_1(t) \equiv I(t)$ ו- $I_2(t) \equiv I(t+\tau)$.
- כמו כן נגדיר את **פונקצית קוהרנטיות העוצמה**, או **פונקצית הקוהרנטיות מסדר שני**

$$\gamma_2(\tau) \equiv \frac{\left\langle I(t) I(t+\tau) \right\rangle_{T_0}}{\left\langle I(t) \right\rangle_{T_0}^2}$$

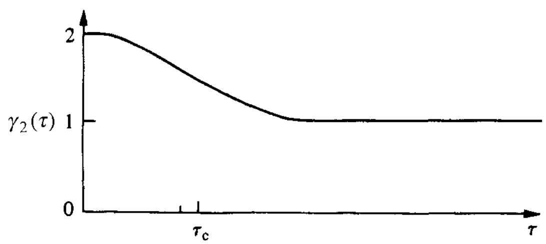


- הפונקציה מסדר שני שונה מזו של הסדר הראשון במכנה.
- בגלל איגוד הפוטונים יש עודף מִתאם בזמנים ארוכים, $\delta t >> \tau_{coherence}$
- ניתן להגדיר גם פונקצית קוהרנטיות מסדר שני במרחב ובזמן.
- כאן נקבל הגברת המתאם כאשר הנקודות A_1, A_2, נמצאות אחת ליד השניה

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \equiv \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)} \equiv \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{I_1 I_2}$$



מדידת קוהרנטיות מסדר שני

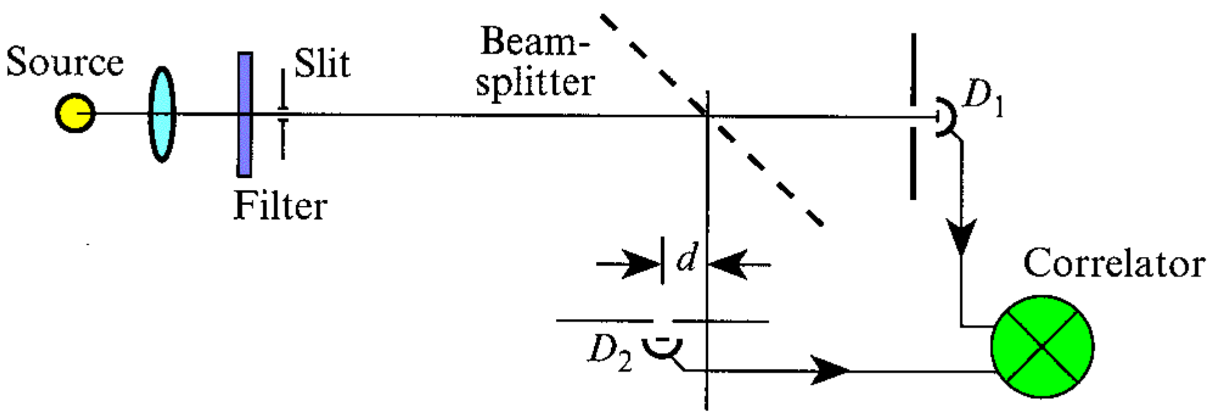


- קל להוכיח כי

$$\gamma_2(\mathbf{r},\tau) = \left|\gamma(\mathbf{r},\tau)\right|^2 + 1$$

- ואכן הקוהרנטיות מסדר שני גדולה תמיד מ-1.

- הקוהרנטיות נמדדת על ידי מיצוע המְתאם של שני זרמים בשני גלאים.



ניסוי אינטרפורמטר העוצמה

- הנבורי-בראון וטוויס (Hanbury-Brown and Twiss) הרחיבו את אינטרפרומטרית הכוכבים לאינטרפרומטרית עוצמה.
- הם השתמשו בשני זרקורים לאיסוף אור מכוכבים, כאשר בין הזרקורים מרחק **r**.
- במוקד של כל זרקור שמו גלאי אור, והכפילו את זרמי שני הגלאים.
- מתוך הקוהרנטיות מסדר שני חישבו את התמרת העצם ומכך את צורתו (כוכבים גדולים וזוגיים).
- האלקטרוניקה באותה עת לא אפשרה כפל בתדר גבוה מ-100 מגה-הרץ, השקול ל- 10^{-8} שניות.
- מכיון שזמן הקוהרנטיות של אור לבן קצר פי מאה, נאלצו לבזבז אור רב כדי לעמוד בקצב הכפל.
- נעשה שימוש במסנן צר סרט שקול, שרוחבו 0.001nm.
- לעומת זאת, הפרעות האטמוספרה אטיות בהרבה ולא הפריעו למדידה.
- קו הבסיס שלהם (ההפרדה בין המפתחים) היה 200 מטר, השקול באור ירוק ל- $5\cdot10^{-4}$ שניות קשת.
- בגלל בזבוז האור הרב, מדדו את כל מאתים הכוכבים שהיו בעוצמה מספיקה למדידה.

רדיו-אסטרונומיה

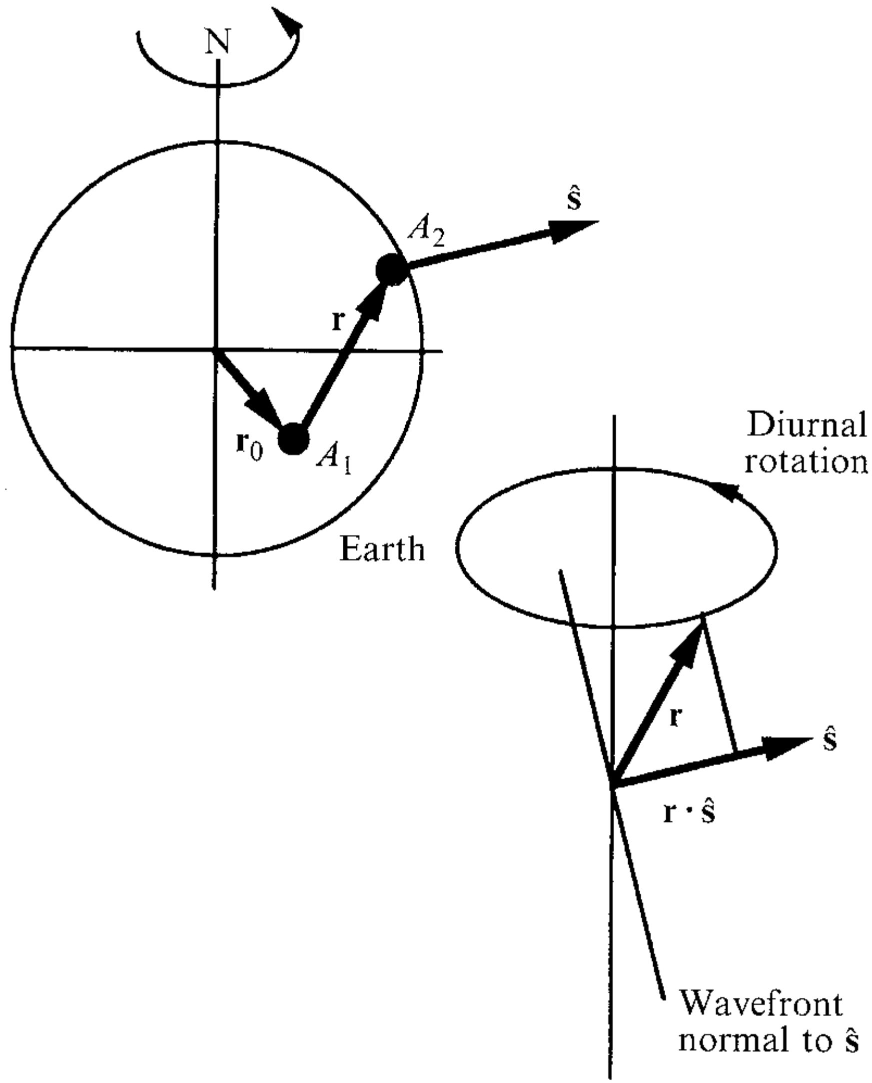
- בתחום אסטרונומית הרדיו יש שימוש רב במשפט Van-Cittert – Zernike.
- במספר תצפיות רדיו, במקומות שונים על פני כדור הארץ ובסביבתו r_n, מודדים את השדה המקומי E_n כפונקציה של הזמן (בתדר רדיו יש אפשרות למדוד את השדה עצמו ולא רק את העוצמה).
- את הערך של E_n רושמים על סרט מגנטי יחד עם אות משעון מאוד מדויק.
- כדי לחסוך בסרט, רושמים למעשה ישירות את אות ההתאבכות בין השדה ובין מתנד מקומי יציב וקבוע, אשר מוריד את תחום התדר של האות הנרשם במספר סדרי גודל (הסרת אפנון, demodulation).
- לאחר מכן מחשבים עבור כל זוג (m, n) את הערך של

$$\gamma(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m) = \left\langle E_n(t) E_m^*(t) \right\rangle$$

- מתוך פונקצית הקוהרנטיות $\gamma\,(r_m - r_n)$ מחשבים את פילוג העוצמה $I\,(\mathbf{k}_0\theta)$ של הכוכב או מערכת כוכבים, בהפרדה מאוד גבוהה, התלויה ביחס בין אורך הגל והמרחקים בין התחנות הרחוקות.
- למשל, אם $r_m - r_n$ המירבי הוא מאות או אלפי קילומטרים, ואורכי הגל הם מספר סנטימטרים, תגיע ההפרדה עד כדי 10^{-8} רדיאן.

סינתזת מְפתחים

- אם ידועה פונקצית הקוהרנטיות $\gamma\ (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)$ המלאה, ניתן לחשב את פילוג העוצמה $I\ (\mathbf{k}_0\theta)$ של הכוכב.
- מכיון שהוקטורים $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n$ אינם ממלאים את כל המישור הניצב לקו הראיה, קשה לבצע את ההתמרה ההפוכה.
- מנצלים את העובדה שיש מספר גדול של תחנות רדיו ובין כל שתים מהן ניתן למדוד את פונקצית הקוהרנטיות.
- עבור n תחנות מקבלים $n\ (n - 1) / 2$ וקטורים כאלו, הקרויים קוי בסיס (base lines).
- בגלל סיבוב כדור הארץ, כל זוג תחנות כזה - כל קו בסיס כזה - נותן תחום שלם של וקטורים במסגרת אינרציאלית.
- אם המקור בכוון $\hat{\mathbf{s}}$ אזי בעת הסיבוב היומי של כדור הארץ יוטל המעגל המותווה על ידי $\mathbf{r}$ לאליפסה.



אינטרפרומטרית רדיו

- לדוגמה, משתמשים בכל הרדיו-טלסקופים בכל ארצות הברית לייצר רשת סינתטית של קוי-בסיס.
- המערך קרוי Very long baseline interferometry (VLBI) .
- עם סיבוב כדור הארץ, יוצר כל זוג אנטנות קו בסיס המסתובב סביב היטל ציר הארץ.
- משתדלים שהמערך יהיה מלא ככל האפשר, כדי לקבל התמרת פוריה טובה ככל האפשר של המקור.
- מתזמנים את כל סרטי ההקלטה באמצעות שעונים אטומיים ומחשבים במעבדה מרכזית את התוצאות.